УДК 519.233:530.145
DOI: https://doi.org/10.53920/ITS-2024-2-2

Олександр Миколайович МАКОВЕЙЧУК,
доктор технічних наук,
Заклад вищої освіти «Міжнародний науково-технічний університет
імені академіка Юрія Бугая»
ORCID ID: 0000-0003-4425-016X

ВИЗНАЧЕННЯ СЕРЕДНЬОЇ КІЛЬКОСТІ КЛАСТЕРІВ НА КВАДРАТНІЙ ГРАТЦІ У ЗАДАЧІ ВУЗЛІВ

У даній роботі було показано, як, використовуючи суму по всіх кластерних конфігураціях («граткові звіри»), будувати аналітичні вирази для оцінки кількості кластерів у задачі вузлів на квадратній ґратці. Розроблено методику отримання явних виразів для граничних випадків малої та великої кількості кластерів, що дозволяє детальніше аналізувати поведінку системи в різних режимах. Для забезпечення точності моделювання на всьому інтервалі ймовірностей запропоновано підхід зшивання цих виразів у спеціальній точці. Ця точка визначається як найбільший корінь рівняння, що отримується шляхом прирівнювання відповідних аналітичних формул. Зазначено, що ця точка зшивання відповідає оцінці порогу перколяції. Додатково показано, що отримана оцінка узгоджується з відомим точним значенням, що підтверджує ефективність запропонованого підходу. Знайдено явні аналітичні вирази для найкращих апроксимацій кількості кластерів, показано, що вони дуже добре узгоджуються з результатами симуляції для квадратної ґратки розміром $10^4 \times 10^4$. Знайдено аналітичний вираз найкращої оцінки порогу перколяції $p_c\,(s = 5) = 2-\sqrt{2}$. Показано, що найкраща апроксимація порогу перколяції отримується для малих s і вказано, що знаходження p_c за допомогою підходу, який базується на прямому обчисленні «граткових звірів» є малоперспективним, якщо не будуть використані якісь нові ідеї. У подальшому, спираючись на отримані результати, представляє інтерес аналітично розрахувати інші статистичні характеристики процесу перколяції, такі як розмір перколяційних кластерів і критичні експоненти.

Ключові слова: *перколяція, задача вузлів, квадратна гратка, «граткові звірі», кількість кластерів.*

Oleksandr MAKOVEICHUK,
Doctor of Technical Sciences,
Higher Education Institution «Academician Yuriy Bugay International Scientific and Technical University»

DETERMINATION OF THE AVERAGE NUMBER OF CLUSTERS IN SITE PERCOLATION FOR A SQUARE LATTICE

This study demonstrates how analytical expressions for estimating the number of clusters in the problem of nodes on a square lattice can be constructed using the summation over all cluster configurations («lattice animals»). A methodology was developed to derive explicit expressions for the limiting cases of small and large numbers of clusters, enabling a detailed analysis of the system's behavior under different regimes.

To ensure accurate modeling across the entire range of probabilities, a novel approach was proposed to «stitch» these expressions at a specific point. This stitching point is determined as the largest root of an equation derived by equating the respective analytical formulas. It was found that this point corresponds to the percolation threshold estimate p_c***. Additionally, it was shown that this estimate is consistent with the known exact value, confirming the validity and effectiveness of the proposed approach.***

Explicit analytical expressions for the best approximations of the number of clusters were derived, showing excellent agreement with simulation results for a square lattice of size $10^4 \times 10^4$***. An analytical expression for the best estimate of the percolation threshold was found as*** $p_c(s = 5) = 2-\sqrt{2}$***.***

It was observed that the most accurate approximation of the percolation threshold is achieved for small values of s . However, it was noted that the direct computation of «lattice animals» for estimating p_c ***may be of limited utility unless new ideas or techniques are introduced to improve this approach.***

Based on the results obtained in this study, future work could focus on analytically calculating other statistical characteristics of the percolation process. These include properties such as the size of percolation clusters and critical exponents, which would provide deeper insights into the fundamental behavior of the system near the percolation threshold.

Keywords: *site percolation, square lattice, «lattice animals», number of clusters.*

Постановка проблеми. Перколяція (percolation, іноді використовують термін «протікання») – це процес, що вивчає утворення кластерів і проходження рідини через пористі матеріали або мережі, де зв'язки між елементами встановлюються випадковим чином. Це важлива модель у статистичній фізиці, теорії графів та ймовірностей, з широким застосуванням у науці та техніці.

Перколяція на двовимірній гратці досліджується з 60-х років минулого століття (див. , наприклад, [1]) і цікава тим, що є простою моделлю, яка демонструє фазовий перехід.

У цій роботі досліджуються статистичні властивості 4-зв'язних кластерів, головним чином, середня кількість кластерів у гратці. Ця характеристика є ключовою, оскільки на її основі можна отримати інші важливі параметри:

- критична ймовірність (critical probability): імовірність, при якій в теорії виникає нескінчений кластер (в комп'ютерних симуляціях кластер вважається таким, якщо він доторкується до всіх країв гратки);
- імовірність перколяції (percolation probability): це ймовірність того, що випадково обраний вузол на гратці належить до великого перколяційного кластера;
- розмір перколяційних кластерів (size of percolation clusters): середня або типова кількість вузлів у великих перколяційних кластерах;
- критичні експоненти (critical exponent): параметр, який описує критичну поведінку фізичних величин близько від критичної точки перколяції, таких як, наприклад, середня кількість кластерів.

При цьому для розуміння критичної поведінки системи у теорії перколяції, а також для опису фазових переходів та критичної поведінки матеріалів і систем, цікавим є знаходження цієї залежності в аналітичному вигляді.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Однією з найважливіших робіт у цій галузі є класична книга [2], вона надає всебічне введення у теорію перколяції, охоплюючи фундаментальні концепції, критичні явища та застосування.

Ретельний розгляд математичних основ теорії перколяції, критичних явищ та концепцій масштабування проводиться у книзі [3].

У статті [4] розглядаються сучасні обчислювальні методи для вивчення моделей перколяції та надаються точні результати для кри-

тичних властивостей. Робота має важливе значення для розвитку обчислювальних підходів у теорії перколяції.

Мета статті полягає в тому, щоб показати, як за знаходити аналітичні вирази для оцінки кількості кластерів у задачі вузлів на квадратній ґратці, використовуючи суму по всіх кластерних конфігураціях.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо нескінчену двовимірну квадратну гратку σ_{ij}, де (i,j) – координати вузлів. Кожен вузол із заданою імовірністю p приймає значення 1 (такі вузли ми у подальшому будемо називати «зайнятими») і, відповідно, з імовірністю $q = 1 - p$ вузол приймає значення 0 (у подальшому – «порожні» вузли) (т. зв. задача вузлів у теорії перколяції Бернуллі). Наприклад, якщо з кожним вузлом зв'язане певне рівномірно розподілене на відрізку $[0 \dots 1]$ випадкове число $r_{i,j}$, то можемо прийняти:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1, & r_{ij} \le p; \\ 0, & r_{ij} > p. \end{cases} \quad (1)$$

Нижче, це проілюстровано на рисунку, де показано значення випадкової матриці r_{ij}, а також два значення імовірності $p_1 = 0.4$ та $p_2 = 0.7$ (рис. 1а). Для кожного значення імовірності показано σ_{ij}, при цьому для $p = p_1$ зайняті вузли формують декілька малих 4-зв'язних кластерів, що позначені різними кольорами, незайняті вузли позначені темно-синім кольором (рис. 1б). При імовірності $p = p_2$ окрім малого жовтого кластера вже наявний великий кластер, який позначено зеленим кольором.

Щоб знайти аналітичну оцінку $n_s(p)$ розподілу кластерів за розмірами (тобто імовірності появи кластера, що містить рівно s зайнятих вузлів), скористаємося прямим методом обчислення суми по всіх різних (з точністю до трансляції) конфігураціях кластерів

$$n_s(p) = \sum_t g_{s,t} p^s q^t, \quad (2)$$

де $g_{s,t}$ нумерує кількість конфігурацій, в яких є рівно s зайнятих вузлів і t порожніх оточуючих вузлів (іншими словами, з периметром довжиною t). У літературі для таких конфігурацій часто зустрічається назва «граткові звірі» (lattice animals) [5, 6].

Нижче, у Таблиці 1 наведено приклади конфігурацій для $s = 1,2,3,4$. Зайняті вузли позначено червоним кольором, вузли периметру – синім. Імовірності появи кожної конфігурації легко розраховують-

ся – кожна така імовірність має вигляд $p^s q^t$, де s – кількість зайнятих вузлів («червоні» вузли), t – кількість вузлів, що належать периметру кластера («сині» вузли). Повна імовірність для всіх конфігурацій, що містять рівно s зайнятих вузлів, очевидно, дорівнює сумі по відповідному рядку таблиці.

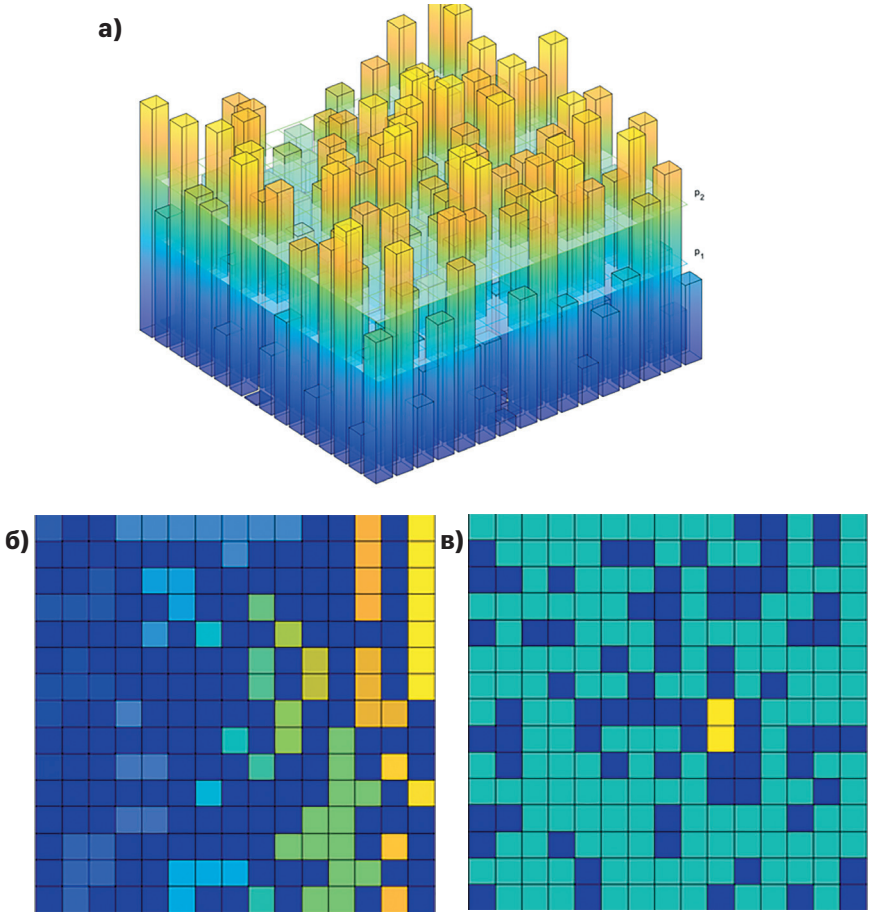

Рис. 1. Перколяція на квадратній гратці:
а) матриця r_{ij}, а також два значення імовірності $p_1 = 0.4, p_2 = 0.7$;
б) матриця σ_{ij} .для $p = p_1$, зайняті вузли формують декілька малих кластерів; в) матриця σ_{ij} .для $p = p_2$, наявний великий кластер.

Таблиця 1. Приклади конфігурацій кластерів на гратці («граткові звірі»)

s	Конфігурації
1	pq^4
2	p^2q^6 p^2q^6
3	p^3q^8 p^3q^7 p^3q^7 p^3q^7 p^3q^7 p^3q^8
4	p^4q^{10} p^4q^9 p^4q^9 p^4q^8 p^4q^8 p^4q^9
	p^4q^9 p^4q^8 p^4q^9 p^4q^8 p^4q^8 p^4q^8
	p^4q^8 p^4q^9 p^4q^8 p^4q^9 p^4q^8 p^4q^9 p^4q^{10}

Таким чином, маємо

$$n_{s=1}(p) = pq^4, \tag{3}$$

$$n_{s=2}(p) = p^2q^6 + p^2q^6 = 2p^2q^6, \tag{4}$$

$$n_{s=3}(p) = p^3q^8 + p^3q^7 + p^3q^7 + p^3q^7 + p^3q^7 + p^3q^8 = 2p^3q^8 + 4p^3q^7. \tag{5}$$

$$n_{s=3}(p) = p^4q^{10} + p^4q^9 + p^4q^9 + p^4q^8 + p^4q^8 + p^4q^9 + p^4q^9 + p^4q^8 + p^4q^9 + \\ + p^4q^8 + p^4q^8 + p^4q^8 + p^4q^8 + p^4q^9 + p^4q^8 + p^4q^9 + p^4q^8 + p^4q^9 + p^4q^{10} = \\ = 2p^4q^{10} + 8p^4q^9 + 9p^4q^8 \tag{6}$$

Кількість таких конфігурацій $\nu(s)$ швидко зростає і для великих s може бути апроксимована як

$$\nu(s) \propto \lambda^s, \tag{7}$$

де $\lambda \approx 4.00253$ – стала Кларнера [7].

Маючи явні вирази для імовірності $n_s(p)$, можна розрахувати середню кількість кластерів $N(p)$:

$$N(p) = \sum_s n_s(p), \quad (8)$$

Якщо у попередній сумі ми обмежуємося сумуванням перших s доданків, то будемо позначати такі частинні суми як $N_s(p)$.

Наприклад, якщо ми врахуємо доданки до $s = 4$ включно, то отримаємо такий вираз:

$$N_4(p) = pq^4 + 2p^2q^6 + 2p^3q^8 + 4p^3q^7 + 9p^4q^8 + 8p^4q^9 + 2p^4q^{10} + \cdots, \quad (9)$$

підставляючи замість q вираз $1 - p$, маємо, що

$$N_4(p) = p(1-p)^4 + 2p^2(1-p)^6 + 2p^3(1-p)^8 + 4p^3(1-p)^7 + 9p^4(1-p)^8 + 8p^4(1-p)^9 + 2p^4(1-p)^{10} + \cdots, \quad (10)$$

або, збираючи попередній вираз за ступенями p, отримуємо

$$N_4(p) = p - 2p^2 + p^4 - 63p^5 + 408p^6 - 1148p^7 + \cdots. \quad (11)$$

Зауважимо, що структура кожного доданку $n_s(p)$ має вид $p^s(1-p)^t$, тобто при розкладі за ступенями p, мінімальний ступінь для цього доданку буде p^s, отже і в кінцевій сумі для $N_s(p)$ слід обмежуватися ступенями до p^s включно:

$$N_4(p) = p - 2p^2 + p^4. \quad (12)$$

Цікаво, що (принаймні для малих s) коефіцієнти при p^s для s, що менше або рівне кількості доданків) є значно меншими, ніж для вищих ступенів (пор. у виразі (11) коефіцієнти при p^s для $s \leq 4$ і для $s > 4$).

Таким чином, можна, враховуючи додаткові $n_s(p)$, отримувати аналітичний вираз для $N_s(p)$, який, як ми очікуємо, зі збільшенням s мав би апроксимувати точний вираз для $N(p)$:

$$N(p) = p - 2p^2 + p^4 + p^8 - p^9 + 2p^{10} - \cdots. \quad (13)$$

Це безумовно правильно, якщо розміри кластерів є скінченими, але при досягненні певного критичного значення p_c (порогу перколяції), тобто, коли буде виконуватися умова $p \geq p_c$, на гратці з'являється нескінчений кластер (див. рис.2), і для цих значень p у всіх сумах необхідно враховувати нескінчену кількість доданків. Для задачі вузлів на двовимірній квадратній гратці значення $p_c = 0.592746050$ [8].

Тим не менш, вираз (12) є хорошою апроксимацією для $p < p_c$ (т. зв. випадок малих кластерів), надалі, щоб підкреслити цю обставину, ми будемо використовувати позначення $N_s^+(p)$ замість просто $N_s(p)$.

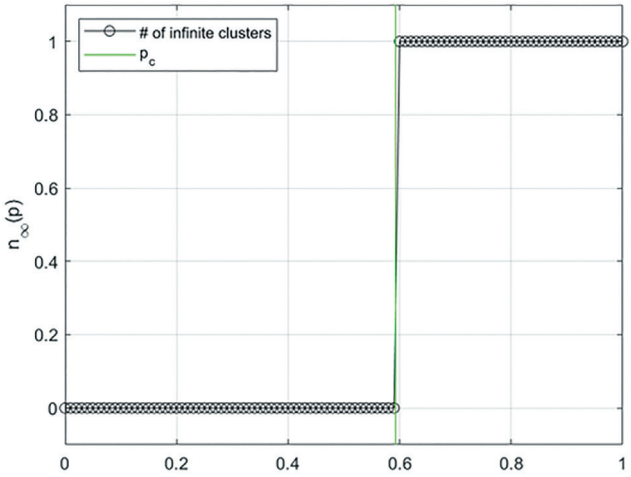

Рис. 2. Кількість великих кластерів

Для випадку коли $p \geq p_c$ (великі кластери), будемо діяти аналогічно, тільки тепер у нас малим параметром буде q. Покажемо знову деталі розрахунку на прикладі для $s = 4$. Отже, підставляючи у (8) замість p вираз $1 - q$, отримуємо (ми вводимо позначення $N_s^-(q)$ замість просто $N_s(q)$ для випадку великих кластерів):

$$N_4^-(q) = (1-q)q^4 + 2(1-q)^2q^6 + 2(1-q)^3q^8 + 4(1-q)^3q^7 + \\ +9(1-q)^4q^8 + 8(1-q)^4q^9 + 2(1-q)^4q^{10} + \cdots, \quad (14)$$

або

$$N_4^-(q) = q^4 - q^5 + 2q^6 + q^8 - 22q^9 + 26q^{10} + \cdots. \quad (15)$$

З міркувань, які наводилися вище, оскільки знаходилася сума перших 4 доданків, залишаємо у цьому розкладі тільки ступені до q^4 включно, тобто

$$N_4^-(q) = q^4. \quad (16)$$

Таким чином, для випадку великих кластерів отримуємо апроксимацію

$$N_\infty^-(q) = q^4 - q^5 + 2q^6 + 2q^8 - 3q^9 + 20q^{10} - \cdots. \quad (17)$$

Отже, ми можемо представити ці функції у вигляді

$$N_\infty^+(p) = \sum_s a_s p^s, \quad (18)$$
$$N_\infty^-(q) = \sum_s b_s q^s, \quad (19)$$

де a_s, b_s – деякі коефіцієнти, нижче у Таблиці 2 наведено їх значення для $s \leq 25$ (з роботи [9]).

Таблиця 2. Коефіцієнти розкладу функцій $N_{\infty}^{+}(p)$, $N_{\infty}^{-}(q)$ (з роботи [9]).

s	a_s	b_s
0	0	0
1	1	0
2	-2	0
3	0	0
4	1	1
5	0	-1
6	0	2
7	0	0
8	1	2
9	-1	-3
10	2	20
11	-4	-58
12	11	163
13	-26	-409
14	62	1318
15	-142	-4400
16	333	14526
17	-780	-45609
18	1828	142904
19	-4256	-447914
20	9894	1416957
21	-23007	-4493802
22	53682	14317184
23	-125690	-45743704
24	295221	146776574
25	-694759	-472408139

Нижче, на рис. 3 наведено графіки для $N_s^+(p)$ і $N_s^-(q)$ у порівнянні з результатами симуляції на гратці розміром $10^4 \times 10^4$.

Використовуючи розклади (18) і (19), можна для кожного значення s отримати оцінку порогу перколяції $p_c(s)$ з умови зшивання у точці перколяції розкладів по p і по q, для чого необхідно розв'язати рівняння

$$N_s^+(p) = N_s^-(1-p), \tag{20}$$

при цьому береться значення найбільшого кореня на інтервалі $(0 \ldots 1)$.

Так, для $s = 4$, отримуємо рівняння

$$p - 2p^2 + p^4 = (1-p)^4. \tag{21}$$

Рівняння (21) легко факторизується, таким чином ми знаходимо 3 точні розв'язки

$$p = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

отже, $p_c(s=4) = 1/2$.

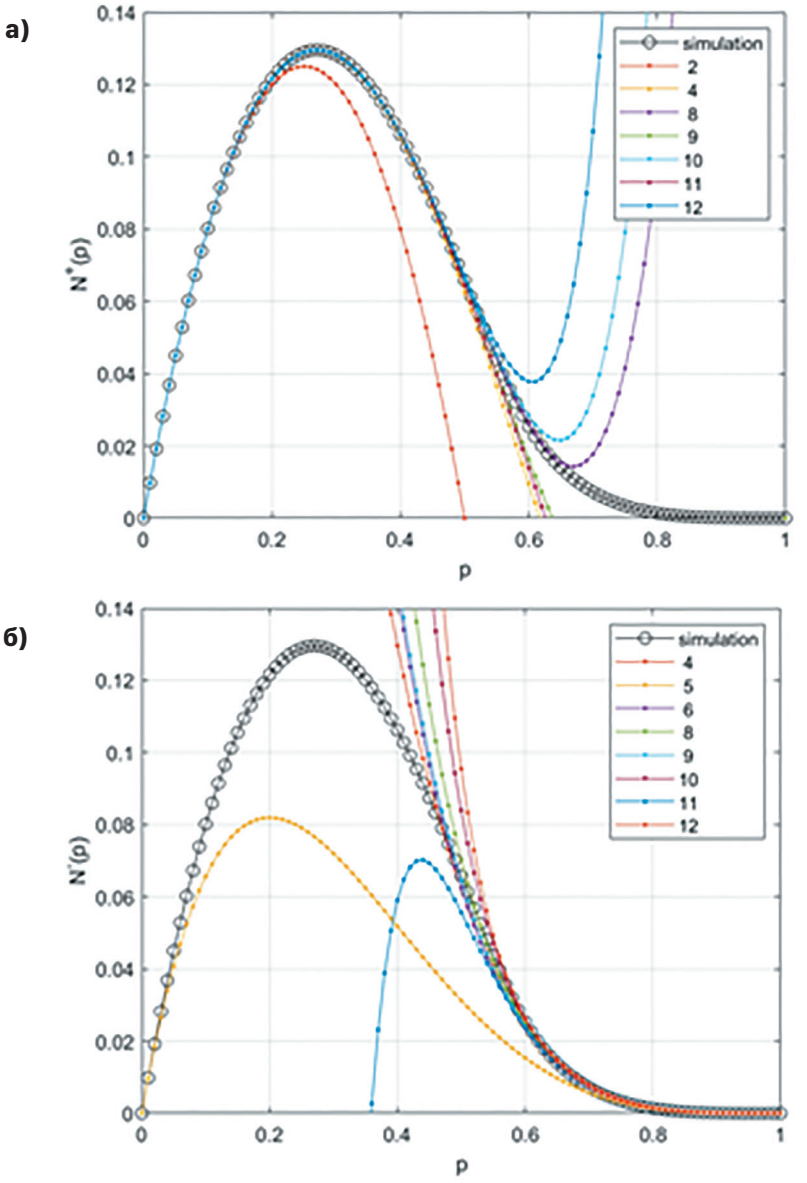

Рис. 3. Апроксимація кількості кластерів:
а) нижче порогу перколяції; б) вище порогу перколяції

Таблиця 3. Оцінка порогу перколяції

s	Найбільший корінь на інтервалі (0 ... 1)		
	рівняння (20)	рівняння (23)	рівняння (24)
1	0	0	0
2	0.500000000000000	0	0.500000000000000
3	0.500000000000000	0	0.500000000000000
4	0.618033988749895	0	0.500000000000000
5	0.618033988749895	0	0.585786437626905
6	0.618033988749895	0	0.525373382437394
7	0.618033988749895	0	0.525373382437394
8	0	0	0.520274884210165
9	0.636882916801845	0	0.550218280013915
10	0	0	0.564181996270654
11	0.625957844858153	0.358844277371246	0.558551551147941
12	0	0	0.554137744885949
13	0.604853956865960	0.435931512101599	0.551599686655597
14	0	0	0.555926599076132
15	0.588162502829159	0.505160986901753	0.557759857825140
16	0	0	0.559338026854301
17	0.572829210255346	0.540052438268432	0.559702660055851
18	0	0	0.560616587431551
19	0.560033314375298	0.562807402920769	0.561212300511351
20	0	0	0.562101826322871
21	0.549168316378963	0.579702837336790	0.562725726932826
22	0	0	0.563429540878739
23	0.539568641106346	0.592737153028665	0.563975335076415
24	0	0	0.564558269543787
25	0.531077034518592	0.603194071133213	0.565060818778864

Зауважимо, що деякі автори (див. наприклад, [10]) замість рівняння (20) пропонують для знаходження p_c розв'язувати рівняння, які у наших позначеннях записуються як

$$N_s^+(p) = 0, \tag{23}$$

чи

$$N_s^-(1-p) = 0. \tag{24}$$

Представляється, що такий підхід не є виправданим, оскільки рівняння (23) і (24) мають дійсні розв'язки не для всіх s, і, як показують результати обчислень (див. Таблицю 3), обчислені таким чином корені $p_c(s)$ не збігаються до точного значення.

Нижче, на рис. 4 зображено поведінку коренів рівнянь (20), (23), (24) для різних значень s.

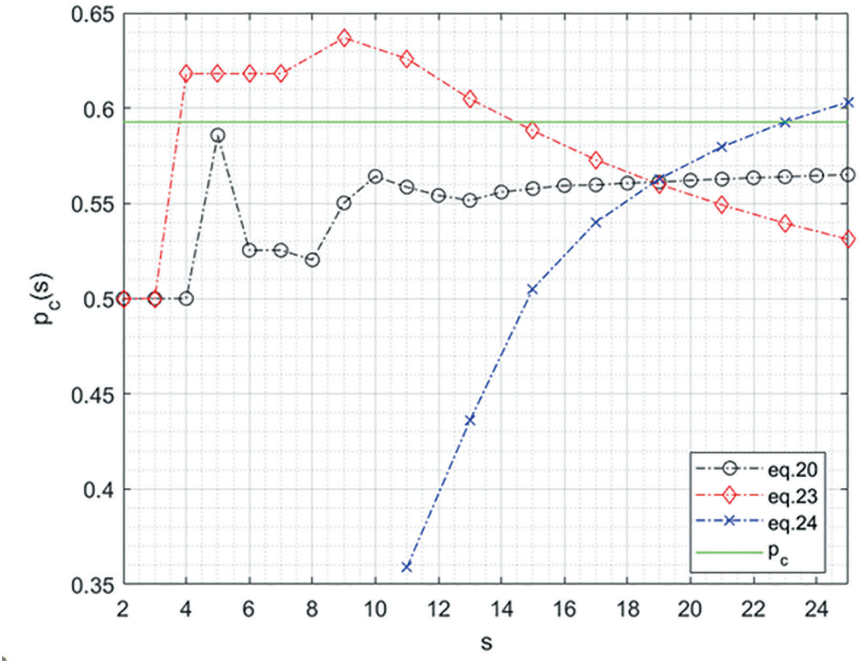

Рис. 4. Поведінка значення порогу перколяції $p_c(s)$, що обчислені різними методами.

Маючи обчисленні значення з рівняння (20) значення $p_c(s)$, можемо записати аналітичний вираз для кількості кластерів, що зшитий з функцій $N_s^+(p)$ і $N_s^-(p)$:

$$N_s(p) = \begin{Bmatrix} N_s^+(p), & p \le p_c(s) \\ N_s^-(1-p), & p > p_c(s) \end{Bmatrix}. \quad (25)$$

Використовуючи розклади (18), (19), рівняння (25) можна записати як

$$N_s(p) = \begin{Bmatrix} \sum_{s'=0}^{s} a_s p^s, & p \le p_c(s) \\ \sum_{s'=0}^{s} b_s (1-p)^s, & p > p_c(s) \end{Bmatrix}, \quad (26)$$

де $p_c(s)$ знаходяться як корені рівняння (20).

На рис. 5 показано результат зшивання розв'язків для різних значень s.

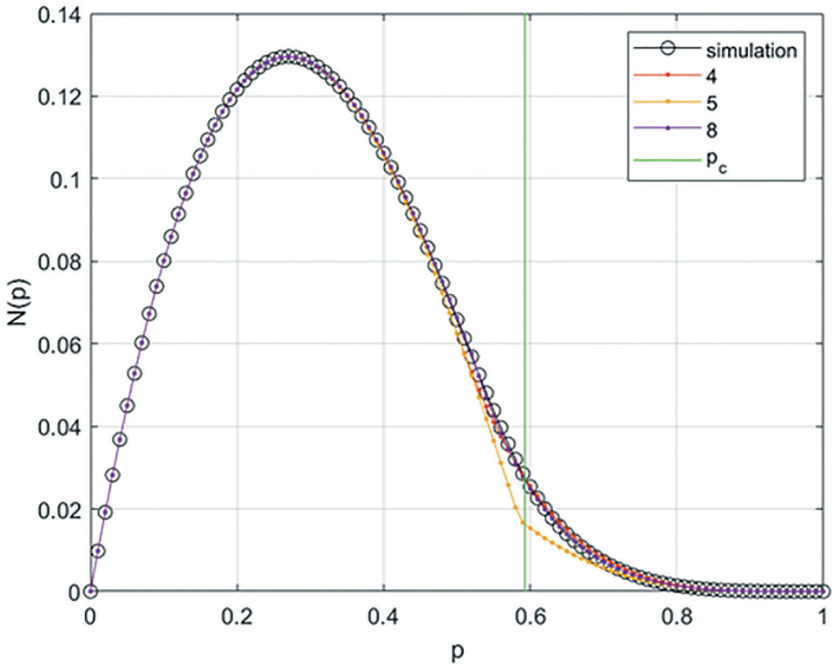

Рис. 5. Зшивання розв'язків

Як видно, зшивання розв'язків для $s = 4$ і $s = 8$ дає результати, які майже не відрізняються між собою і дуже добре узгоджуються з результатами симуляції. Результати для інших значень $s \leq 25$ з чисельним експериментом узгоджуються гірше. Графік для $s = 5$ має характерний злам у точці зшивання, але цікаво, що сама точка зшивання $p_c(s = 5)$ =0.585786437626905 найкраще узгоджується з значенням порогу перколяції для задачі вузлів на двовимірній квадратній гратці $p_c = 0.592746050$. Нагадаємо, що $p_c(s = 5)$ є найбільшим коренем на інтервалі $(0 \ldots 1)$ рівняння

$$p - 2p^2 + p^4 = (1-p)^4 - (1-p)^5, \tag{27}$$

після певних спрощень воно зводиться до кубічного рівняння

$$-p^3 + 5p^2 - 6p + 2 = 0, \tag{28}$$

яке має такі розв'язки:

$$p = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ 1 \\ 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

отже, $p_c(s=5) = 2-\sqrt{2}$.

Запишемо тепер явні вирази для найкращих апроксимацій:

$$N_4(p) = \begin{cases} p - 2p^2 + p^4, & p \le 1/2 \\ (1-p)^4, & p > 1/2 \end{cases} \quad (30)$$

$$N_8(p) = \begin{cases} p - 2p^2 + p^4 + p^8, & p \le p_c(s=8) \\ (1-p)^4 - (1-p)^5 + 2(1-p)^6 + 2(1-p)^8, & p > p_c(s=8) \end{cases} \quad (31)$$

де $p_c(s=8)$ знаходиться як розв'язок рівняння 8 ступеня:

$$-p^8 + 16p^7 - 58p^6 + 123p^5 - 165p^4 + 146p^3 - 84p^2 + 28p - 4 = 0, \quad (32)$$

яке на інтервалі $(0 \ldots 1)$ має єдиний корінь

$p_c(s=8) = 0.520274884210165$ (див. також Таблицю 3 та рис. 4).

Наскільки перспективним є запропонований підхід для знаходження значення порогу перколяції? Як вже було вказано вище, кількість конфігурацій, які потрібно розглянути, щоб розрахувати коефіцієнти розкладу функцій $N_\infty^+(p)$, $N_\infty^-(q)$, експоненційно зростає; зростають і самі коефіцієнти розкладу (див. Таблицю 2), при цьому самі коефіцієнти є знакозмінними. Це означає, що точність апроксимації цих функцій зростає дуже повільно, а пряме обчислення корені рівняння (20) є дуже затратним. Тому виникає парадоксальна ситуація – найкраща апроксимація порогу перколяції отримується для малих s. Представляється, що знаходження порогу перколяції за допомогою підходу, який базується на прямому обчисленні «граткових звірів» є малоперспективним, якщо не будуть використані якісь нові ідеї.

Висновки та пропозиції.

1. У цій роботі продемонстровано, як за допомогою суми по всіх кластерних конфігураціях («граткові звірі») можна будувати аналітичні вирази для оцінки кількості кластерів у задачі вузлів на квадратній ґратці.

2. Знайдено явні вирази для граничних випадків малої та великої кількості кластерів.

3. Для апроксимації на всьому інтервалі запропоновано використовувати зшивання виразів у точці, яка є найбільшим на інтервалі (0...1) коренем рівняння, що отримується прирівнюванням відповідних виразів.

4. Встановлено, що точка зшивання є оцінкою порогу перколяції, і показано, що ця оцінка узгоджується з точним значенням. Знайдено аналітичний вираз $p_c(s=5) = 2 - \sqrt{2}$, що найкраще узгоджується зі значенням порогу перколяції для задачі вузлів на двовимірній квадратній ґратці. Цей результат потребує подальшого аналізу.

5. Розроблено явні аналітичні вирази (30), (31) для найкращих апроксимацій кількості кластерів, які добре узгоджуються з результатами симуляції.

У подальшому, спираючись на отримані результати, представляє інтерес аналітично розрахувати інші статистичні характеристики процесу перколяції.

© Маковейчук О.М., 2024

ЛІТЕРАТУРА

1. Broadbent, S. R., & Hammersley, J. M. (1957). "Percolation Processes: I. Crystals and Mazes."

2. Stauffer, D., & Aharony, A. (1994). "Introduction to Percolation Theory."

3. Grimmett, G. (1999). "Percolation." Second edition. Springer-Verlag, Berlin.

4. Newman, M. E. J., & Ziff, R. M. (2001). "Efficient Monte Carlo Algorithm and High-Precision Results for Percolation."

5. Conway, A. (1995). "J. Phys. A: Math. Gen." 28, 335.

6. Sykes, M. F., & Glen, M. (1976). "J. Phys. A: Math. Gen." 9, 87.

7. Barequet, G., Rote, G., & Shalah, M. (2015). "λ > 4." In: Bansal, N., Finocchi, I. (eds) Algorithms - ESA 2015. Lecture Notes in Computer Science(), vol 9294. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-662-48350-3_8

8. Mertens, S. (2022). "J. Phys. A: Math. Theor." 55, 334002.

9. Conway, A. R., & Guttmann, A. J. (1995). "J. Phys. A: Math. Gen." 28, 891.

10. Neher, R. A., et al. (2008). "J. Stat. Mech." P01011.

REFERENCES

1. Broadbent, S. R., & Hammersley, J. M. (1957). "Percolation Processes: I. Crystals and Mazes."

2. Stauffer, D., & Aharony, A. (1994). "Introduction to Percolation Theory."

3. Grimmett, G. (1999). "Percolation." Second edition. Springer-Verlag, Berlin.

4. Newman, M. E. J., & Ziff, R. M. (2001). "Efficient Monte Carlo Algorithm and High-Precision Results for Percolation."

5. Conway, A. (1995). "J. Phys. A: Math. Gen." 28, 335.

6. Sykes, M. F., & Glen, M. (1976). "J. Phys. A: Math. Gen." 9, 87.

7. Barequet, G., Rote, G., & Shalah, M. (2015). "λ > 4." In: Bansal, N., Finocchi, I. (eds) Algorithms - ESA 2015. Lecture Notes in Computer Science(), vol 9294. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-662-48350-3_8

8. Mertens, S. (2022). "J. Phys. A: Math. Theor." 55, 334002.

9. Conway, A. R., & Guttmann, A. J. (1995). "J. Phys. A: Math. Gen." 28, 891.

10. Neher, R. A., et al. (2008). "J. Stat. Mech." P01011.

СТАТТЯ НАДІЙШЛА ДО РЕДАКЦІЇ 01.10.2024